HOJA 5: DIAGONALIZACIÓN

1) Para los siguientes endomorfismos de R^2, halle los autovalores y los subespacios propios asociados estudiando qué rerpesentan éstos geométricamente:

a) $f(x,y) = (x, 2y)$ b) $g(x,y) = (x+y, 0)$

c) $h(x,y) = (2x-y,\ x-2y)$ d) $A = M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) Determine los autovalores y subespacios propios de los siguientes endomorfismos:

a) $f(x,y,z) = (x, z, -y)$ b) $g(x,y,z) = (x-y+3z, 2y-3z, -z)$

c) $h(x,y,z) = (x-y+3z,\ y-3z, -z)$ d) $m(x,y,z) = (x-y+z,\ 2y-z,\ z)$

3) Dado el endomorfismo $f: P_3(R) \to P_3(R)$, definido por $f\big(p(x)\big) = p\ (x+1)$, calcule sus autovalores y subespacios propios.

4) Estudie si es diagonalizable el endomorfismo $f: P_3(R) \to P_3(R)$, definido por $f(x,y,z) = (-z, 0, x)$.

5) Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de R^3. Estudie si es diagonalizable el automorfismo de R^3 definido por $f(e_1 - e_2) = (-3,-2,1)$, $f(e_1 + e_3) = (-3,-3,0)$, $f(3e_2 - 3e_3) = (4,3,1)$.

6) Estudie, según los valores del parámetro real a, la diagonalización de los siguientes endomorfismos de R^3 o de R^4, y obtenga la forma diagonal en los casos que sea posible.

a) $f(x,y,z) = (x-2y-(2+a)z,\ \ y+az,\ z)$

b) $f(x,y,z) = (x+a(x-y+z),\ (a+2)x-ay+(a-1)z, 2x-y)$

c) $f(x,y,z,t) = (x,\ \ 2x,\ \ x, x+ay)$

7) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Halle los autovalores de A, los subespacios propios asociados y la matriz P del cambio de base tal que $D = P^{-1}AP$. Calcule A^{123}.

8) Dada $f: M_{2x2}(R) \to M_{2x2}(R)$, definida por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$, obtenga su forma diagonal.

9) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ a & -1 & -2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Estudie para qué valores del parámetro real a, la matriz A es diagonalizable. Para $a=0$, obtenga la matriz diagonal D y la matriz de cambio de base P, tales que $D = P^{-1}AP$.

10) Para $a \in R$ se considera el endomorfismo $f_a: R^3 \to R^3$, cuya matriz en base canónica es $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudie para qué valores de a es f_a un isomorfismo.

b) Halle los valores de $a \in R$ para los que f_a es diagonalizable.

c) Para $a = 1$, obtenga las matrices P y D tales que $A_1 = PAP^{-1}$.

11) Sea f el endomorfismo de R^3 de ecuaciones: $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = -x_1 - x_2 \\ y_3 = -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$

a) Halle una base de $Ker\, f$ y otra de $Im\, f$.

b) Averigüe si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, obtenga su forma diagonal y la matriz de cambio de base.

12) Sea $f: M_{2x2}(R) \to M_{2x2}(R)$ la aplicación lineal definida por

$$f(A) = AF - FA\ , \quad \text{siendo } F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Ecuaciones de f en la base usual de $M_{2x2}(R)$.

b) Base y ecuaciones implícitas de $Ker\, f$.

c) Polinomio característico y espectro de f.

d) Una base de autovectores, si existe, respecto de la que la matriz de f es diagonal.

13) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule A^n , con n número natural. Lo mismo para $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, siendo $a, b \in R$.

14) Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \geq 0,\ a + c = b + d = 1 \right\}$.

a) Estudie qué matrices $M \in G$ son diagonalizables.

b) Para las matrices $M \in G$ diagonalizables, obtenga P regualr y D diagonal verificando $M = P^{-1}DP$.

c) Halle M^n y compruebe que $M^n \in G$ para todo $n \geq 0$.

15) Sabiendo que el endomorfismo $f: R^2 \to R^2$ es diagonalizable, que los vectores $(1, 2)$ y $(3, 1)$ son vectores propios y que $f(5, -5) = (2, -1)$, halle los autovalores de f y la matriz de f en la base canónica.

16) Sea f el endomorfismo de R^3 con espectro $\sigma\,(f) = \{1, 2, -1\}$, y que tiene por vectores propios asociados a los correspondientes autovalores: $(1, 1, 1), (0, 1\ 2), (1, 2, 1)$. Obtenga la matriz asociada a f respecto de la base canónica de R^3**.**

17) Dado un endomorfismo de R^3 del que se sabe que son vectores propios los vectores $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0\ , 0, 1)$, y sabiendo además que hay vectores de R^3 que no son propios, halle todos los vectores propios del endomorfismo.

18) Sea f el automorfismo de R^4 dado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $M_1 = L\,(\{\ (1, 0, -2, -1)\ \})$.

a) Compruebe que $f(M_1) \subset M_1$.

b) Obtenga M_2 , subespacio de R^4, tal que $f(M_2) \subset M_2$ y $M_1 \subset M_2 \subset R^4$.